Damascus University
Higher Institute of Earthquake Studies and Researches

Continuum Mechanics- Elasticity and Plasticity

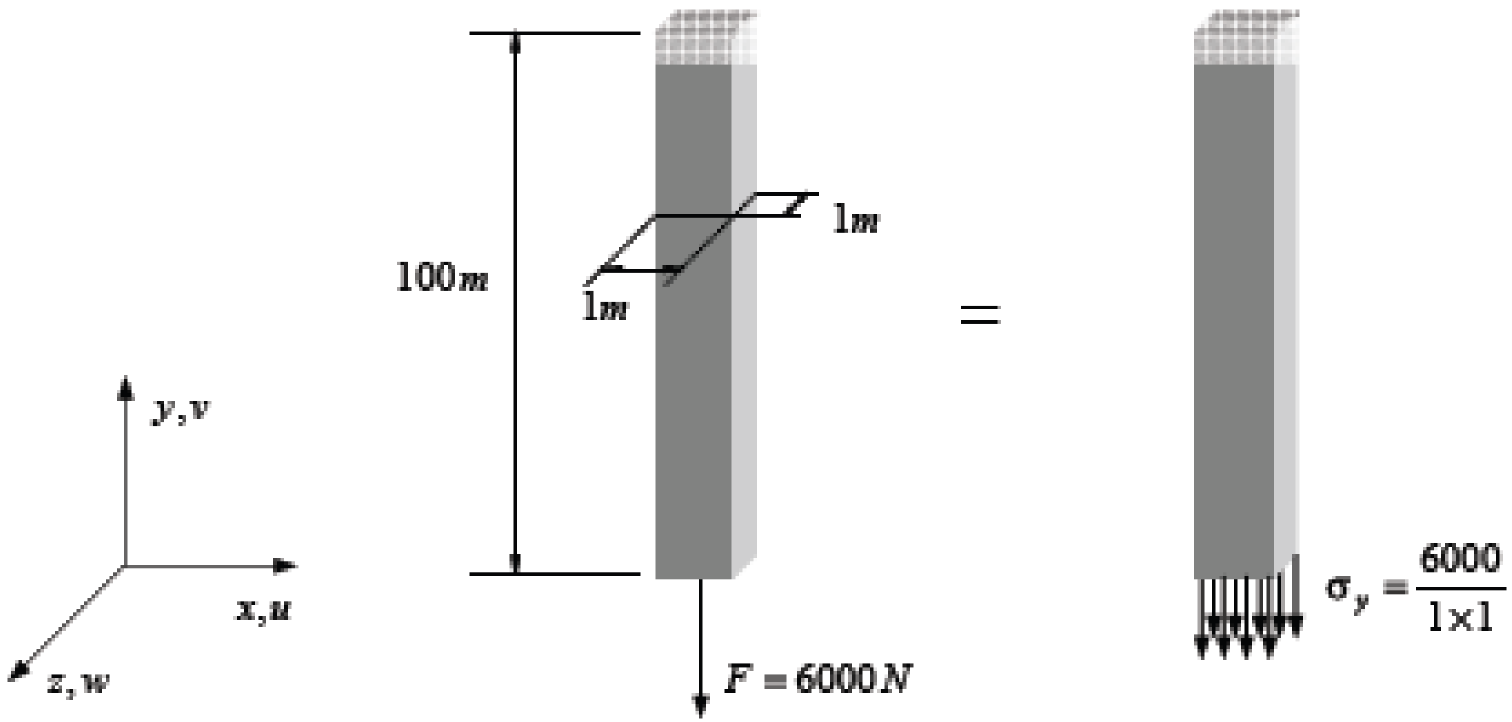
Lec.10

The Displacement Field and Strain Field
Strain Gauges Problems

Dr. Reem Alsehnawi – 25/3/2020– L10

مسألة 1:

ليكن لدينا القضيب المبين في الشكل أدناه والمطبق عليه قوة مقدارها 6000N على نهاية واحدة فقط. أوجد ε_x , ε_y , ε_z , ومقدار التغير في طول القضيب. على اعتبار أن خواص مادة القضيب هي: معامل المرونة $E=10^7Pa$، معامل بواسون $\nu=0.3$.



الحل:

باستخدام علاقات الانفعالات الناظمية نستطيع حساب:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = -\frac{\nu}{E}\sigma_y = -\frac{(0.3)(6000)}{10^7} = -0.00018$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{6000}{10^7} = 0.0006$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = -\frac{\nu}{E}\sigma_y = -0.00018$$

التغير الكلي في أبعاد المقطع العرضي هو

$$u = w = -0.00018 \times 1 = -1.8 \times 10^{-4}\, m\, .$$

التغير الكلي في طول القضيب:

$$v = 0.0006 \times 100 = 6.0 \times 10^{-2}\, m\, .$$

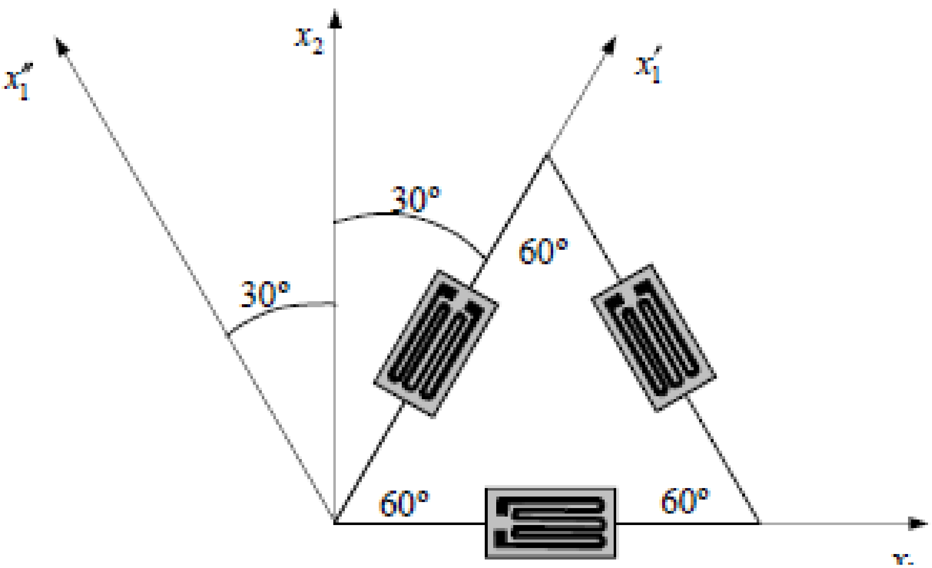
مسألة 2:

على اعتبار أن زهرة انفعالات مكونة من ثلاثة مقاييس لقياس الانفعالات تم تشكيلها حسب التشكيل المثلث المتساوي الأضلاع كما هو مبين بالشكل. تم قياس الانفعالات في الاتجاهات x''_1 , x'_1 , x_1. وكانت قيم الانفعالات الموافقة لهذه الاتجاهات، على التوالي، هي:

$$\varepsilon_{11} = -4\times10^{-4}$$

$$\varepsilon'_{11} = 1\times10^{-4}$$

$$\varepsilon''_{11} = 4\times10^{-4}$$



باعتبار أن الانفعالات مستوية،

أوجد: $\varepsilon_{22} = \varepsilon_y$ ، $2\varepsilon_{12} = \gamma_{xy}$ ، $\varepsilon'_{22} \equiv \varepsilon'_y$

بين أن: $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}$.

الحل:

Using the component transformation law for the second-order tensor and considering the 2D-plane state, we obtain that:

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\cos(2\theta_1) + \varepsilon_{12}\sin(2\theta_1)$$

$$\varepsilon''_{11} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\cos(2\theta_2) + \varepsilon_{12}\sin(2\theta_2)$$

where $\theta_1 = 60°$ and $\theta_2 = 120°$. Then, by combining the above equations, it is possible to eliminate ε_{12}, *i.e.*:

$$\varepsilon_{22} = \frac{2}{3}\left(\varepsilon'_{11} + \varepsilon''_{11} - \frac{\varepsilon_{11}}{2}\right) = 4.66667 \times 10^{-4}$$

Once the value $\varepsilon_{22} = 4.66667 \times 10^{-4}$ is obtained, we can replace it into the equation ε'_{11} and we obtain:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(4\varepsilon'_{11} - \varepsilon_{11} - 3\varepsilon_{22}\right) = -3.46410 \times 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{12} = -1.73205 \times 10^{-4}$$

الحل:

To obtain ε'_{22}, first we obtain the angle of rotation with respect to x_1, which is $\theta_3 = 60°+90° = 150°$, thus:

$$\varepsilon'_{22} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\cos(2\theta_3) + \varepsilon_{12}\sin(2\theta_3) = -0.33333 \times 10^{-4}$$

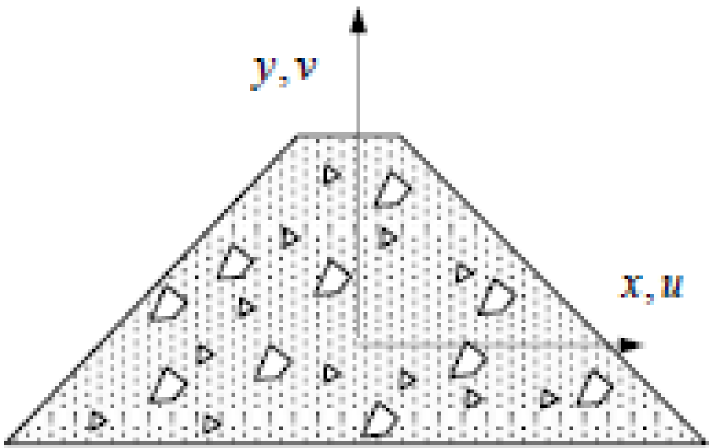
Checking that:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} = 0.66667 \times 10^{-4}$$

As expected, since the trace is an invariant.

مسألة 3:

ليكن لدينا مقطع لسد كما هو مبين في الشكل أدناه، بفرض أن توابع الانتقال معلومة ومعطاة كما يلي:



$$\begin{cases} u(x,y) = -4x^2 - y^2 + 2xy + 2 \\ v(x,y) = -4y^2 - x^2 + 2xy + 5 \end{cases}$$

خواص المواد المشكلة لهذه المنشأة:

$$E = 100MPa\ ,\quad G = 35.7MPa\ ,\quad \nu = 0.4$$

1- أوجد حقل الإجهادات

2- من أجل حقل الانتقال المعطى، أظهر إن كانت معادلات التوازن محققة أم لا.

الحل:

1- نحسب مركبات تنسور الانفعالات:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -8x + 2y \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -8y + 2x \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

التي تأخذ الشكل المصفوفي:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -8x+2y & 0 & 0 \\ 0 & -8y+2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2- نستطيع تطبيق شروط الانفعالات المستوية في حالة سد:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = 357.1428 \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8x+2y \\ -8y+2x \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = 357.1428 \begin{bmatrix} -4x-2y \\ -2x-4y \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = 357.1428 \times [(-8x+2y) + (-8y+2x)]$$

الحل:

وبالتالى نستطيع ايجاد معادلات التوازن كما يلى:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho b_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho b_y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho b_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4+0+0+0 \neq 0 \quad \text{(fails)} \\ 0-4+0+0 \neq 0 \quad \text{(fails)} \\ 0+0+\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}+0=0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\times}$$

So, the given displacement field does not satisfy the equilibrium equations.

Homework:

Consider a *strain rosette* that contains three strain gauges where there are 45° internal angles, (see Figure 7.10). At one point we have calculated the following strain values:

$$\varepsilon_x = 0.33\times10^{-3} \quad ; \quad \varepsilon'_x = 0.22\times10^{-3} \quad ; \quad \varepsilon_y = -0.05\times10^{-3}$$

Find the maximum shear stress at the point in question.

Then consider an isotropic linear elastic material with the following mechanical properties: $E = 29000\,Pa$ (Young's modulus); $\nu = 0.3$ (Poisson's ratio).

a) Obtain the eigenvalues (principal strains) and eigenvectors (principal directions) of the strain tensor;

b) Obtain the eigenvalues (principal stresses) and eigenvectors (principal directions) of the stress tensor.

Hint: Consider the state of plane strain.